توضیح ضروری: در این آزمون هر سؤال شامل بخش‌های توضیحی است که فرض‌های سؤال را توضیح می‌دهند. این بخش‌ها با حروف معمولی نگاشته شده‌اند. خواسته‌های سؤال با **حروف سیاه** نگاشته شده‌اند.

*** استفاده از خودکار قرمز، صرفا برای پاسخ‌گویی به قسمتی از سؤال ۶ (بر روی نقشه) مجاز می‌باشد***

سؤال ۱) نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم m با دامنه $A_۰$ و بسامد زاویه‌ای ω حول مبدأ $x = ۰$ نوسان می‌کند و در لحظه $t = ۰$ به سمت مثبت از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

آ) معادله $x(t)$ و $v(t)$ را بنویسید که به ترتیب جابه‌جایی از مکان تعادل و سرعت لحظه‌ای نوسانگر هستند.

فرض کنید بر اثر اصطکاک با هوا یک نیروی مقاوم کوچک متناسب با سرعت به صورت $f = -bv$ بر نوسانگر اثر کند که در آن b یک ضریب ثابت است. این نیرو آن‌قدر کوچک است که در طی مدت یک دوره نوسان $(T = ۲\pi/\omega)$ تاثیر اندکی دارد و معادلات $x(t)$ و $v(t)$ را بر هم نمی‌زند. همچنین انرژی و دامنه نوسانگر در طی زمان‌هایی در حدود دوره نوسان، ثابت است؛ اما در زمان‌هایی که بسیار بزرگ‌تر از دوره نوسان است و آنها را با τ نشان می‌دهیم، به دلیل نیروی مقاوم آرام آرام کاهش پیدا می‌کند، به‌طوری‌که آهنگ اتلاف انرژی با توان متوسط نیروی مقاوم برابر است $\left(\bar{P} = dE/d\tau\right)$. بسامد نوسانگر همواره ثابت است.

ب) توان لحظه‌ای اتلافی توسط نیروی مقاوم و متوسط آن را در یک دوره نوسان بر حسب t، b، ω و A به‌دست آورید، که در آن A دامنه در زمان مورد نظر است. (لازم به ذکر است که توان لحظه‌ای برای یک نیروی متغیر حاصل ضرب آن نیرو در سرعت متحرک است. همچنین برای حرکت‌های سینوسی مقدار متوسط عبارت‌های نوسانی مثل $\sin\omega t$، $\cos\omega t$، $\cos ۲\omega t$ و ... در یک دوره نوسان صفر است و مقدار متوسط هر عبارت ثابت برابر خود آن عبارت است.)

پ) انرژی نوسانگر بر حسب زمان‌های بزرگ، $E(\tau)$ را بر حسب $A_۰$، ω، b، τ و m به‌دست آورید که در اینجا زمان τ در مقیاس زمان‌هایی است که بسیار بزرگ‌تر از دوره نوسان است. (پاسخ سؤال حاوی تابعی موسوم به تابع نمایی است که خواص آن در انتهای سؤال توضیح داده شده است).

ت) $A(\tau)$ را بر حسب $A_\circ$، b و m به‌دست آورید که در اینجا نیز زمان τ در مقیاس زمان‌هایی است که بسیار بزرگتر از دوره نوسان است.

برای جبران انرژی از دست رفته نوسانگر می‌خواهیم بعد از گذشت زمان $\tau_\circ = N_\circ T$، که در آن $N_\circ$ عدد صحیح بسیار بزرگی است، با زدن ضربه‌ای به نوسانگر مجدداً انرژی آن را به مقدار اولیه برسانیم. برای این کار درست در لحظه‌ای که نوسانگر در انتهای مسیر خود با دامنه $A(\tau_\circ)$ می‌رسد به آن ضربه‌ای وارد می‌کنیم تا سرعت آن از صفر به سرعتی برسد که بعد از آن با همان دامنه $A_\circ$ به نوسان ادامه دهد.

ث) اگر ضربه در مدت زمان بسیار کوچک δt که از دوره نوسان بسیار کوچکتر است به نوسانگر نواخته شود، نیروی متوسط وارد بر نوسانگر را بر حسب b، $A_\circ$، $\tau_\circ$، ω، m، و δt به‌دست آورید.

ج) مقادیر عددی کمیت‌های مرتبط را به صورت زیر در نظر بگیرید

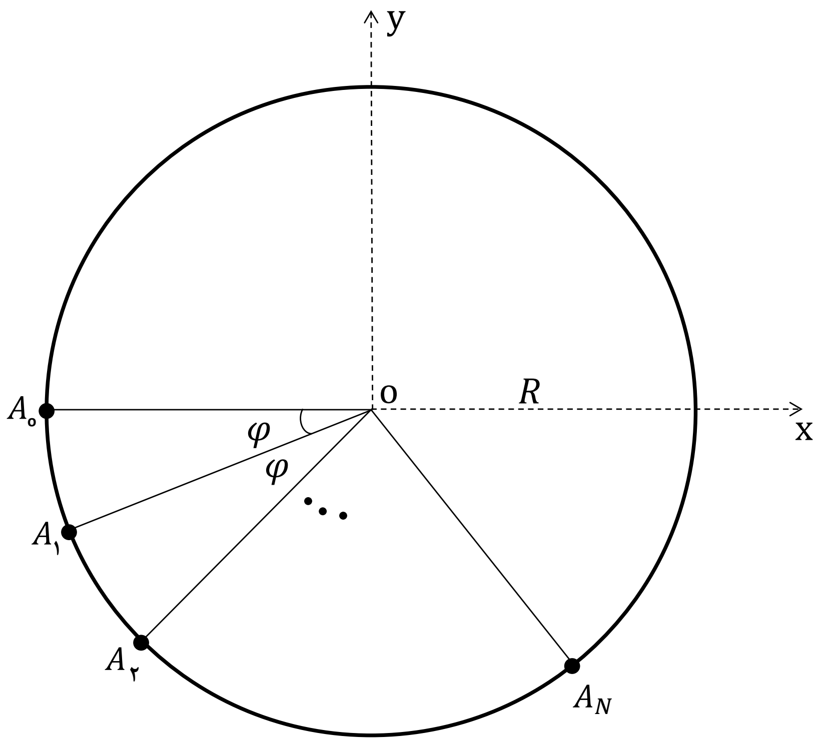
$$m = ۱/۰ \times ۱۰^{۲} g \qquad \omega = ۱/۰ \times ۱۰^{۲} \mathrm{rad/s} \qquad b = ۱/۰ \times ۱۰^{-۳} \mathrm{kgs}^{-۱}$$
$$A_\circ = ۵/۰ \mathrm{cm} \qquad \delta t = ۲/۰ \times ۱۰^{-۴} \mathrm{s}$$

به‌ازای این داده‌ها معلوم کنید مدت زمانی که دامنه نوسان نصف می‌شود چند ثانیه است و چند برابر دوره نوسان است. همچنین با فرض آن که ضربه مذکور در بخش ث، درست در لحظه‌ای که دامنه نصف شده، به جسم نواخته شده باشد، اندازه نیروی متوسط خواسته شده در بخش ث را به‌دست آورید. جواب‌های عددی را با دو رقم با معنی حساب کنید.

خواص تابع نمایی

تابع نمایی، $\exp$، تابعی است توانی که در آن عدد گنگ ...$\mathrm{e} = ۲/۷۲$ به توان متغیر می‌رسد: $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. مهمترین خاصیت این تابع آن است که مشتق آن با خودش برابر است ($\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$)، به طوری که می‌توان نوشت: $\frac{d}{dx}(A\mathrm{e}^{ax}) = a(A\mathrm{e}^{ax})$, که در آن A و a ثابت هستند. عکس تابع نمایی، لگاریتم طبیعی یا لگاریتم در پایه e است و با نماد $\ln$ نشان داده می‌شود، به طوری که $y = \mathrm{e}^x$ نتیجه می‌دهد $x = \ln y$. مفید است بدانید که تا دو رقم اعشار داریم $\ln ۲ = ۰/۶۹$

سؤال ۲) آرایه‌ای از بارهای q مطابق شکل روی محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع R قرار دارند. نخستین بار در نقطه A_0 روی محور افقی و بارهای بعدی در نقاط A_1، A_2، ... و A_N قرار گرفته‌اند، به‌طوری که زاویه بین شعاع‌های واصل از نقطه O به دو نقطه متوالی A_k و A_{k+1} مقدار ثابت φ باشد. تعداد کل بارها نیز $N+1$ است.



آ) محورهای مختصات را مطابق شکل بگیرید و مولفه‌های میدان الکتریکی کل در نقطه O را به صورت یک مجموع روی $\cos n\varphi$ **و یا** $\sin n\varphi$ **به‌دست آورید.**

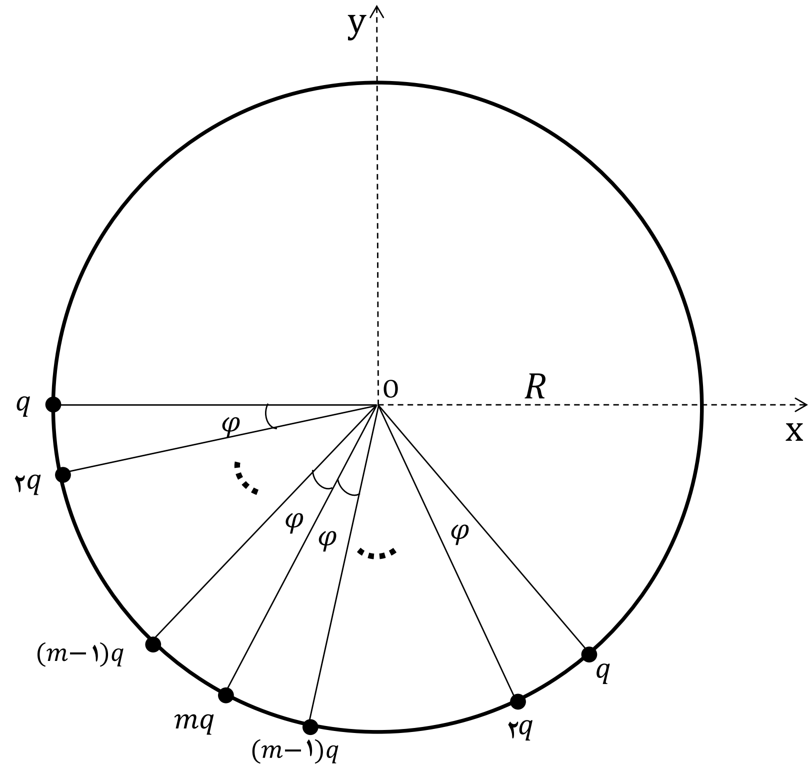
ب) می‌خواهیم جواب‌های سری قسمت قبل را به طور صریح به‌دست آوریم. برای این کار بردارهایی را که می‌خواهید جمع کنید دنبال هم بکشید و با استفاده از استدلال های هندسی، اندازه میدان الکتریکی کل و زاویه آن با محور x را بر حسب φ، N، q **و ثابت‌های فیزیکی معین کنید و سپس مولفه‌های میدان الکتریکی کل را در امتداد محورهای x و y حساب کنید.**

حال فرض کنید بارها یک در میان $+q$ و $-q$ باشند به‌طوری‌که بار اولی واقع در A_0 مثبت باشد. تعداد کل آنها نیز همان $N+1$ است.

پ) برای N زوج، مولفه‌های میدان الکتریکی در نقطه O را از روش هندسی بخش ب به‌دست آورید.

ت) برای N فرد نیز مولفه‌های میدان الکتریکی در نقطه O را از روش هندسی بخش ب به‌دست آورید.

ث) با استفاده از روش هندسی بخش ب مولفه‌های میدان الکتریکی در نقطه O را برای آرایه زیر به‌دست آورید. (جواب صریح مورد نظر است نه جواب سری)



سؤال ۳) یک نمونه از یک ماده پرتوزا (یا رادیواکتیو) را در نظر بگیرید که با گذشت زمان واپاشیده می‌شود. احتمال واپاشی یک اتم در واحد زمان را ثابت واپاشی (یا فروپاشی) می‌نامند و با λ نمایش می‌دهند. این کمیت را مقدار ثابتی در نظر بگیرید.

آ) فرض کنید در لحظه t، تعداد $N(t)$ هسته پرتوزا در یک نمونه موجود باشد. پس از گذشت زمان بسیار کوچک Δt تعداد هسته های پرتوزا به مقدار ΔN تغییر می‌کند. رابطه‌ای بین ΔN، Δt و λ بیابید.

ب) با استفاده از بخش آ، $\frac{dN}{dt}$ را بر حسب N و λ بیان کنید.

پ) با استفاده از توضیحات انتهای سؤال در مورد تابع نمایی، $N(t) = a\exp(bt)$ خواهد بود. a و b را بر حسب ثابت واپاشی و $N_۰$ (تعداد هسته‌های مادر پرتوزای موجود در نمونه در $t = ۰$) بیابید.

ت) رابطه بین ثابت واپاشی و نیمه عمر نمونه (τ) را به‌دست آورید.

یک هسته مادر پرتوزای اولیه می‌تواند به دو طریق واپاشیده شود و در هر واپاشی یک هسته دختر متفاوت ایجاد شود.

ث) اگر نیمه عمر هر واپاشی $\tau_۱$ و $\tau_۲$ باشد، تعداد هسته‌های دختر تولید شده، $N_۱$ و $N_۲$ را در زمان t بیابید.

(هسته‌های دختر پایدار هستند و تعداد هسته‌های مادر اولیه را $N_۰$ در نظر بگیرید.

یکی از راه‌های تولید نمونه‌های پرتوزا قرار دادن هدفی متشکل از هسته‌های پایدار در یک راکتور است. هسته‌های هدف با جذب نوترون یا ذرات باردار، نمونه پرتوزا تولید می‌کنند. آهنگ تولید یک نمونه پرتوزا (تعداد هسته‌های پرتوزای تولید شده در واحد زمان) که آن را با R نمایش می‌دهند، با تقریب بسیار خوبی مستقل از زمان بوده و کمیت ثابتی است. فرض کنید در این فرایند هسته‌های پرتوزایی با ثابت واپاشی λ تولید شود.

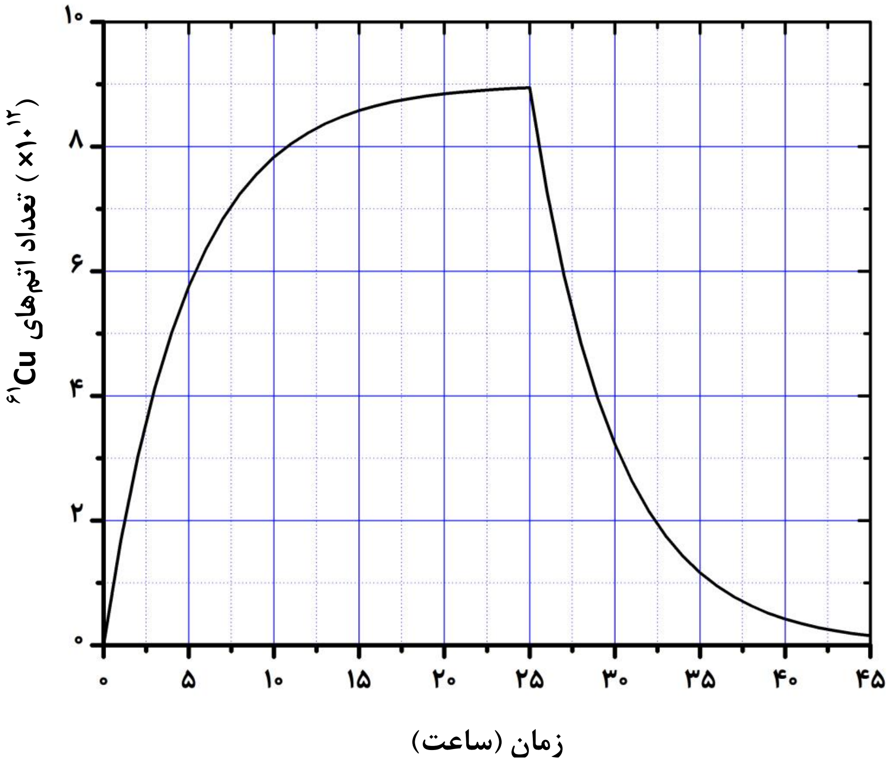
ج) در این حالت $\frac{dN}{dt}$ را بر حسب $N(t)$، R و λ بدست آورید که $N(t)$ تعداد هسته‌های پرتوزا در لحظه t است.

چ) اگر در زمان $t = ۰$ هیچ هسته پرتوزایی در هدف وجود نداشته باشد، تعداد هسته‌های پرتوزا به صورت زیر وابسته به زمان است:

$$N(t) = \alpha + \beta\exp(\gamma t)$$

α، β و γ را بر حسب آهنگ تولید و ثابت واپاشی بیابید.

در یک راکتور، به مدت **۲۵** ساعت، هسته $^{۶۱}\mathrm{Ni}$ توسط نوترون بمباران شده و $^{۶۱}\mathrm{Cu}$ تولید می‌شود و سپس راکتور خاموش می‌شود. شکل زیر تغییرات تعداد اتمهای $^{۶۱}\mathrm{Cu}$ را نسبت به زمان نشان می‌دهد.



ح) مقدار عددی ثابت واپاشی $^{۶۱}\mathrm{Cu}$ را برحسب عکس ساعت ($h^{-۱}$) بیان کنید.

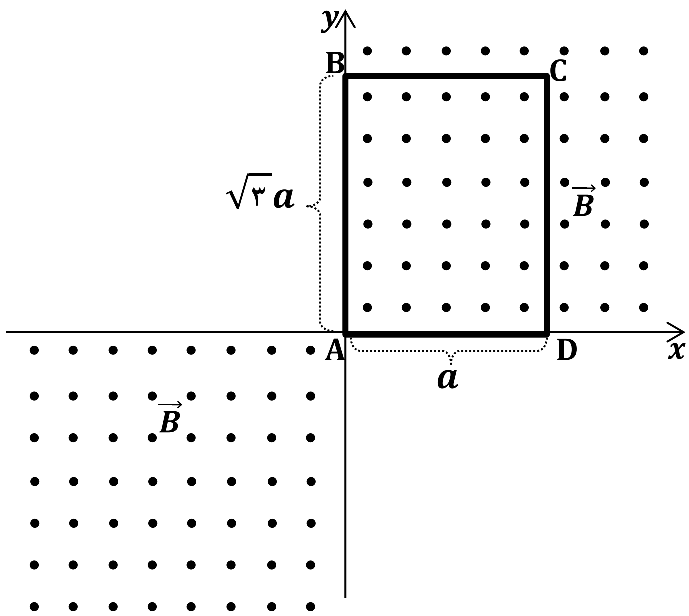
خ) آهنگ تولید در این راکتور چقدر است؟

د) حاصل‌ضرب ثابت واپاشی در تعداد هسته‌های پرتورزا در هر لحظه را اکتیویته می‌نامند. زمان لازم برای آنکه ۷۵ درصد اکتیویته بیشینه بر اثر پرتودهی حاصل شود، چند برابر نیمه عمر است؟

خواص تابع نمایی

تابع نمایی، $\exp$، تابعی است توانی که در آن عدد گنگ $\mathrm{e} = ۲/۷۲...$ به توان متغیر می‌رسد: $\exp x = \mathrm{e}^x$. مهمترین خاصیت این تابع آن است که مشتق آن با خودش برابر است ($\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$)، به طوری که می‌توان نوشت: $\frac{d}{dx}(A\mathrm{e}^{ax}) = a(A\mathrm{e}^{ax})$, که در آن A و a ثابت هستند. عکس تابع نمایی، لگاریتم طبیعی یا لگاریتم در پایه e است و با نماد $\ln$ نشان داده می‌شود، به طوری که $y = \mathrm{e}^x$ نتیجه می‌دهد $x = \ln y$. مفید است بدانید که تا دو رقم اعشار داریم $\ln ۲ = ۰/۶۹$

سؤال ۴) قاب مستطیلی ABCD را در نظر بگیرید. مطابق شکل راس A در مبدا مختصات ثابت شده است. در زمان $t = \circ$ ضلع های $AB = \sqrt{\text{۳}}a$ و $DA = a$ بر روی محورهای مختصات و به ترتیب در جهت +y و +x قرار دارند. قاب مستطیلی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω شروع به دوران ساعتگرد حول مبدا مختصات می‌کند.



آ) اگر میدان $\overrightarrow{B} = B_\circ \hat{k}$ عمود بر صفحه قاب در ربع اول و سوم مختصات برقرار باشد، شار میدان مغناطیسی را در یک دور کامل چرخش در تمام زمان‌ها بر حسب a، ω، $B_\circ$ و t به‌دست آورید. (نیم خط عمود بر صفحه قاب را در جهت $\hat{k}$ در نظر بگیرید.)

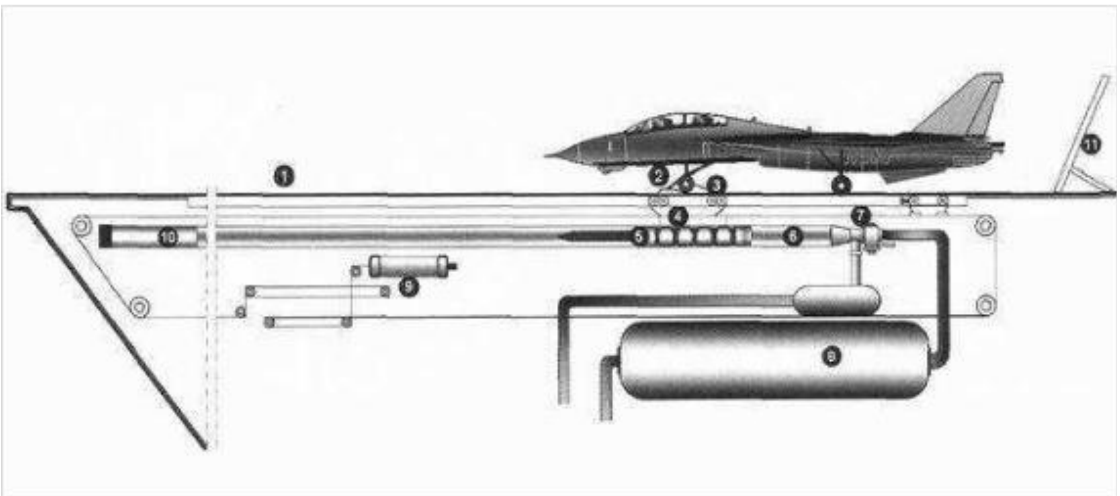
ب) نیروی محرکه القایی متناظر با میدان مغناطیسی قسمت الف را به‌دست آورید.

پ) حال فرض کنید که میدان مغناطیسی در ربع اول و سوم به صورت $\overrightarrow{B} = B_\circ \cos(\omega t)\hat{k}$ باشد. در این صورت شار مغناطیسی گذرنده از قاب در لحظه t و نیروی محرکه القا شده در قاب $\varepsilon(t)$ را به‌دست آورید.

ت) نیروی محرکه القایی برای میدان مغناطیسی بخش پ را تابعی از زاویه چرخش $\theta = \omega t$ بر حسب رادیان بگیرید. معین کنید در چه بازه‌هایی از θ، نیروی محرکه القایی ساعتگرد و در چه بازه‌هایی پادساعتگرد است؟

سؤال ۵) اطلاعات جانبی مربوط به سؤال :

ناو هواپیمابر یک کشتی جنگی است که برای حمل کردن و پوشش دادن هواپیماها و بالگردهای جنگی طراحی شده است و به عنوان یک فرودگاه شناور عمل می‌کند. این‌گونه هواپیماها می‌توانند بدون سوخت‌گیری و توقف، در مسافت‌های دور عملیات خود را انجام دهند. ناو هواپیمابر یک جنگ‌افزار بسیار گران‌قیمت است و تعداد آنها کم است. مساحت کل عرشه پروازی در یک ناو برابر با ۱/۸ هکتار یعنی ۱۸۰۰۰ متر مربع است. طول عرشه برابر با **۳۳۳** متر یعنی معادل طول سه زمین فوتبال بین‌المللی و بسیار کوچکتر از اندازه باند فرودگاه‌های معمولی است؛ و عرض عرشه پروازی برابر با ۷۸ متر یعنی بیش از متوسط عرض یک زمین فوتبال استاندارد است. به همین دلیل خلبان‌های نیروی دریایی باید مهارت‌های ویژه‌ای داشته باشند. نحوه برخاستن هواپیماها از روی ناو روش‌های گوناگونی دارد. در ناوهای اتمی از سیستمی به اسم منجنیق یا کاتاپولت (شتاب دهنده هواپیما) برای به حرکت در آوردن هواپیما استفاده می‌کنند. در این روش، هواپیما بر روی یک ریل قرار گرفته و هم‌زمان با روشن شدن موتور توسط کاتاپولت نیز به پیش رانده می‌شود. وقتی تمام این مراحل انجام گرفت، افسر کاتاپولت معروف به شوتر، که در یک گنبد شیشه‌ای روی عرشه پروازی بر تمام مراحل نظارت دارد، سوپاپ سیلندرهای کاتاپولت را باز می‌کند، در نتیجه سیلندرها توسط بخار آب پرفشار تولید شده در راکتور ناو پر می‌شوند. این بخار بخشی از نیروی رانشی لازم برای ادامه پرواز با سرعت ایمن را تأمین می‌کند. اگر میزان این بخار، که بستگی به نوع هواپیما دارد، کم باشد نیروی بالابر کافی نیست و هواپیما به داخل اقیانوس پرتاب می شود و اگر زیاد باشد موجب شکستن چراغ دماغه خواهد شد.



یك هواپیما به جرم ۱۸ تن برای پرواز باید ضمن حرکت بر روی عرشه از حالت سکون به سرعت ۱۵۰ گره دریایی (knot) برسد. هر گره دریایی را برای سادگی $۱/۸\frac{\mathrm{km}}{h}$ در نظر بگیرید. فرض کنید ۷۵ درصد انرژی لازم برای رسیدن به این سرعت از طریق دستگاه کاتاپولت و مابقی به وسیله موتور هواپیما تامین شود. عملکرد دستگاه کاتاپولت را فرایند پیش‌رانش می‌نامیم. فشار هوای محیط را $۱۰۰\mathrm{kPa}$ بگیرید.

آ) اگر دستگاه کاتاپولت، یك سیستم سیلندر- پیستون در فشار ثابت $۱۲۵۰\mathrm{kPa}$ باشد تغییر حجم بخار آب داخل آن در طی فرایند پیش‌رانش چقدر است؟

در قسمت های بعدی سؤال فرض کنید در فرایند پیش‌رانش فشار بخار آب محبوس شده درون سیلندر در یک فرایند خطی روی نمودار P-V از $۱۲۵۰\mathrm{kPa}$ تا $۵۰۰\mathrm{kPa}$ کاهش یابد.

ب) تغییر حجم بخار آب در فرایند پیش‌رانش را حساب کنید.

پ) با فرض آن که حجم اولیه $۵۰\mathrm{m}^۳$ باشد، معادله خط مربوط به فرایند پیش‌رانش را به‌دست آورید.

ت) اگر بخار آب، یك گاز آرمانی فرض‌شود و دمای اولیه آن $T_۱ = ۵۰۰\ \mathrm{K}$ باشد، دمای نهایی انبساط $T_۲$ و دمای بیشینه ضمن انبساط، T_m، را حساب کنید.

ث) گرمای Q داده شده به گاز در فرایند پیش‌رانش، هنگامی که حجم گاز از $V_۱$ به حجم دلخواه V رسیده است را حساب کنید. فرض کنید $C_V = ۳/۵R$ که در آن R ثابت جهانی گازها است. نمودار Q بر حسب V را برای فرایند فوق به طور کیفی رسم کنید و مختصات نقاط مهم نمودار مانند نقاط تقاطع با محورها و کمینه‌ها و بیشینه‌های احتمالی را تعیین کنید.

سؤال ۶) نقشه ارائه شده در صفحه (۶-۳)، تصویری از توپوگرافی یک منطقه کوهستانی است. در این نقشه خطوط هم‌ارتفاع، که ارتفاع آنها از سطح دریا مضربی از ۱۰۰ متر است، رسم شده و مقیاس نقشه نیز در بالای آن نوشته شده است. فرض کنید بین دو خط هم ارتفاع متوالی، ارتفاع زمین به‌طور خطی تغییر می‌کند. برخی از پاسخ‌های سوال بایستی روی همین تصویر که در صفحه (۶-۳) است، با خودکار قرمز کشیده شود، پس در هنگام رسم نقاط و خطوط دقت کنید که تصویر پاسخ نامه دچار خط خوردگی نشود. تمامی‌جواب های عددی این سوال را به صورت نماد علمی و با دو رقم با معنی ذکر کنید.

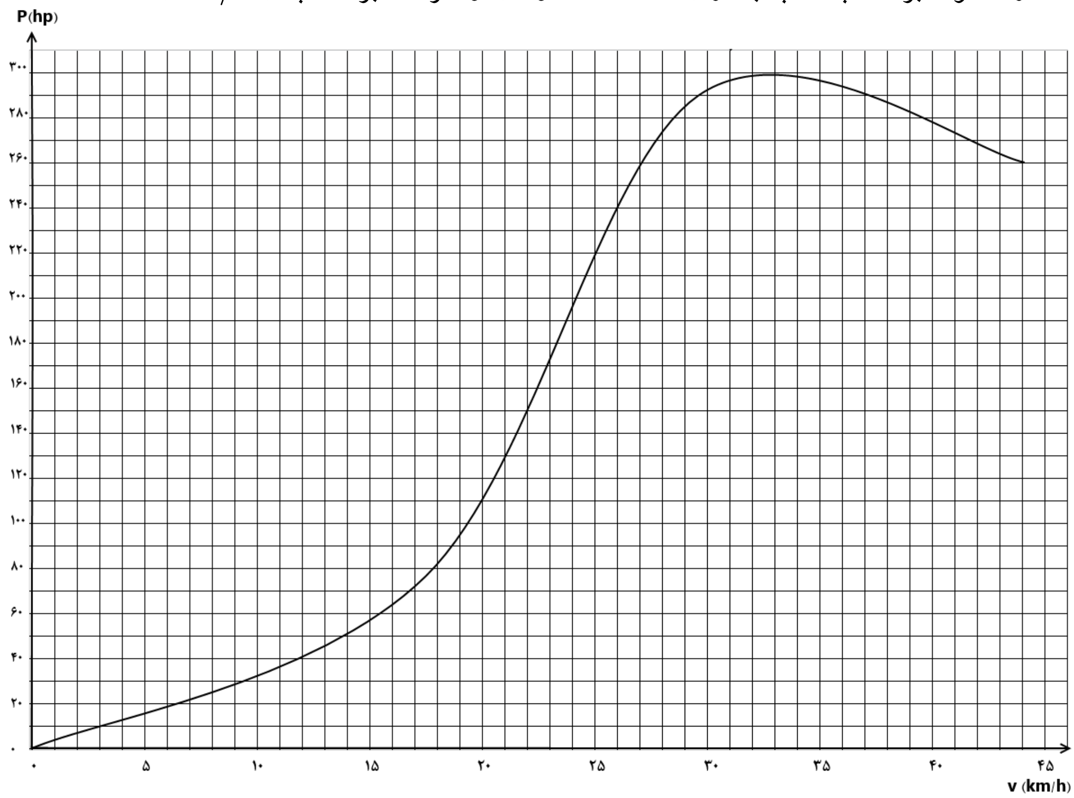
آ) روی تصویر چاپ شده در صفحه (۶-۳) پَست ترین نقطه را با C و دو محدوده که شیب در آن از هر جهت صفر است را با D و محلی که در نیمه بالای نقشه بیشترین شیب را دارد با علامت X نشان دهید. ارتفاع پست‌ترین نقطه (h_C) در نقشه و مقدار بیشترین شیب را به طور تقریبی بنویسید.

ب) بر روی همان نقشه حداقل دو دره را با خط پیوسته پر رنگ و دو یال را با خط چین پر رنگ و قلم رنگی مشخص کنید.

توضیح : محل برخورد دو دامنه شیبدار در بالاترین نقاط تماس، یال و در پایین ترین نقاط تماس، دره است.

پ) در صفحه (۶-۳)نمودار تغییرات ارتفاع (نیم رخ توپوگرافی) را در صفحه قائم فرضی که‌از نقاط F و E می‌گذرد رسم کنید. در این نمودار ، محور افقی مکان افقی نقاط خط EF را با همان مقیاس نقشه توپوگرافی نشان می‌دهد.

با توجه به استاندارد اتومبیل‌ها با ایجاد تونل یا پل باید جاده را طوری طراحی کرد که اندازه شیب آن از حد معینی فراتر نرود. اتومبیلی به جرم ۲/۰ تن در نظر بگیرید که نمودار توان تولیدی موتور آن در دنده سنگین بر حسب سرعت به صورت زیر است که در آن توان بر حسب اسب بخار (معادل ۷۳۵ وات) و سرعت بر حسب ($\mathrm{km/h}$) است.



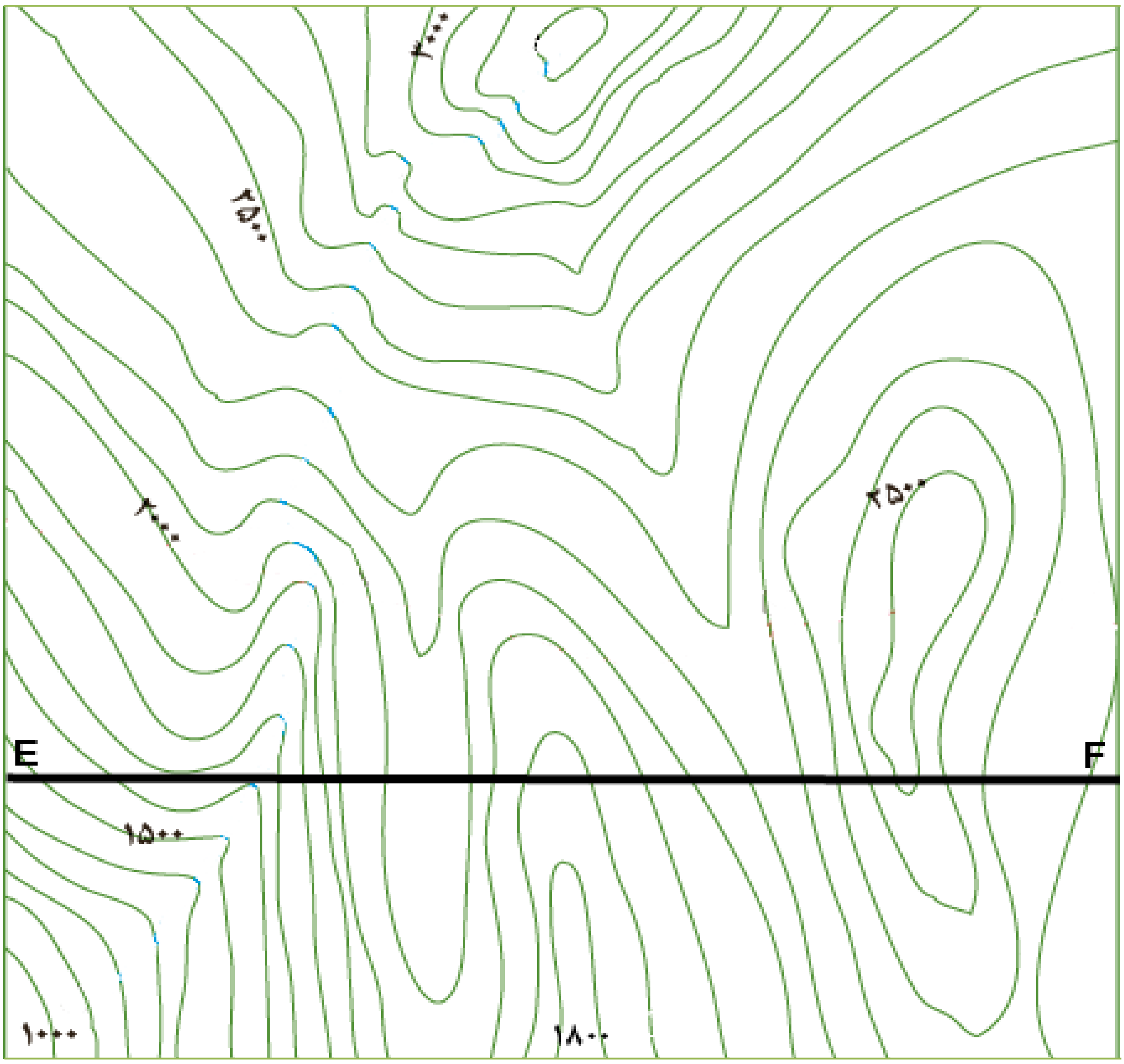
ت) فرض کنید ۱۰ درصد توان موتور باعث شود جاده نیرویی در امتداد مسیر حرکت به‌اتومبیل وارد کند. بیشینه این نیرو چقدر است؟ این نیرو به‌ازای کدام سرعت و توان اتفاق می‌افتد؟ از اصطکاک هوا چشم بپوشید.

ث) اگر ضریب اصطکاک جاده به‌اندازه کافی زیاد باشد که اتومبیل روی جاده سر نخورد، بیشترین شیبی که اتومبیل فوق می‌تواند بالا رود چقدر است ؟ (شتاب گرانش زمین را $۱۰\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ در نظر بگیرید.)

ج) فرض کنید خط EF در نقشه توپوگرافیک یک جاده در دست احداث را نشان دهد. شیب جاده باید طوری تنظیم شود که اتومبیل فوق با ۷۷ درصد نیروی بیشینه بتواند آن را طی کند. روی نقشه مشخص کنید که در کدام بخش از جاده باید پل یا تونل ایجاد شود؟ برای این کار می‌توانید نقاط تقاطع مسیر جاده و خطوط هم ارتفاع مناسب را ملاک قرار دهید. بخش‌هایی از مسیر که پل یا تونل می‌شوند را پر رنگ کرده و به‌ترتیب با علامت B و T مشخص کنید. برای زاویه‌های کوچک مورد نظر در این سؤال سینوس و تانژانت را برابر بگیرید.

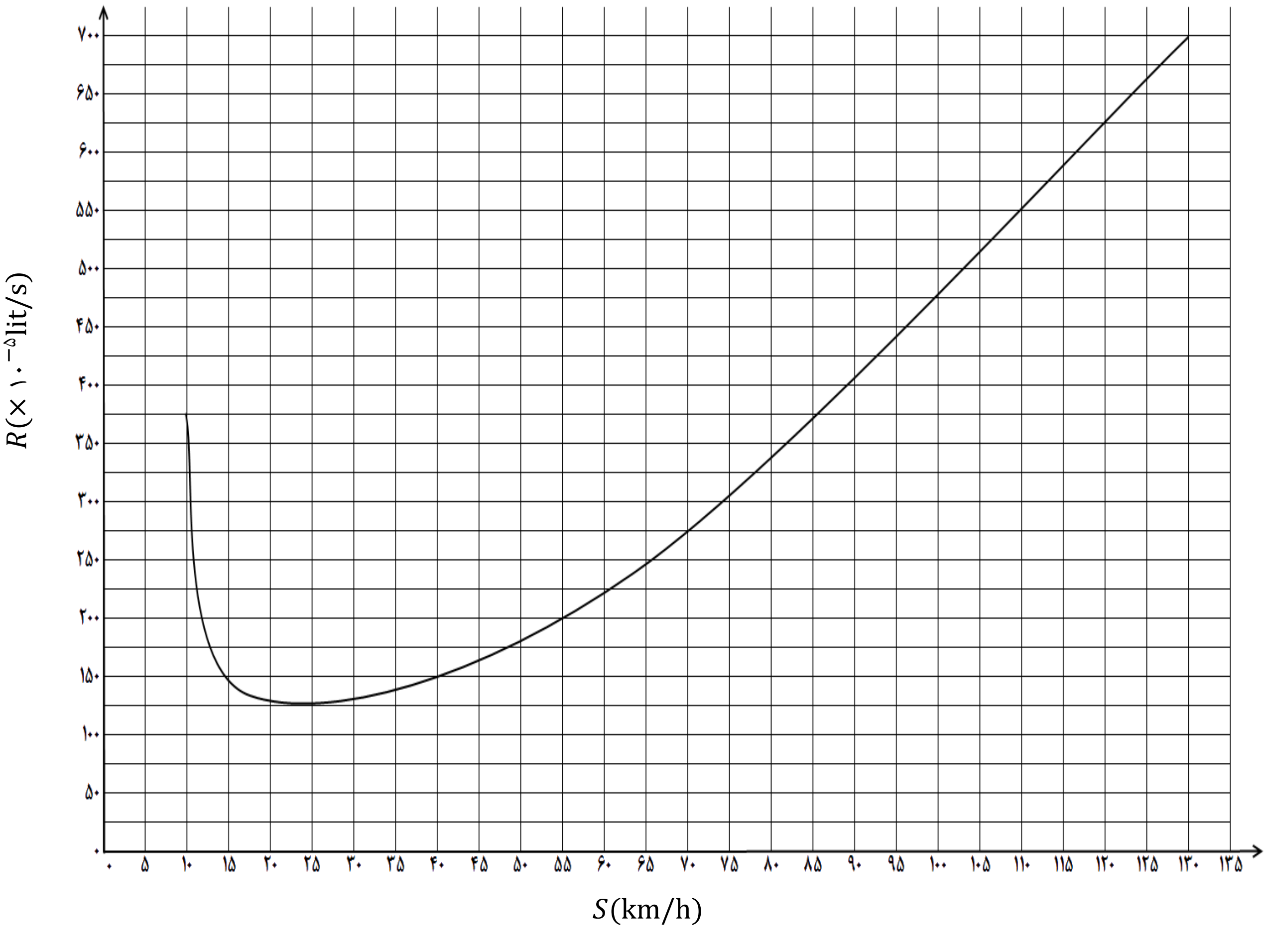
این برگ قسمتی از پاسخ نامه است. دقت کنید که تصویر پاسخ نامه دچار خط‌خوردگی نشود.

هریک سانتی متر روی نقشه معادل ۲ کیلومتر واقعی است. ارتفاع‌های ذکرشده در نقشه برحسب متر است.



پ) نیم‌رخ توپوگرافی

سؤال ۷) میزان مصرف سوخت خودروها با دو کمیت مختلف سنجیده می‌شود که یکی حجم سوخت مصرف شده بر واحد زمان، $R = \frac{dV}{dt}$، و دیگری حجم سوخت مصرف شده بر واحد طول طی شده، $Q = \frac{dV}{dl}$ است. نمودار زیر نشان دهنده رابطه بین کمیت R برای یک اتومبیل در جاده افقی و سرعت اتومبیل، S در حالت سرعت ثابت است. در تمام این سوال مقادیر عددی را با دو رقم با معنی ذکر کنید. نقطه پایان نمودار سرعت بیشینه است.



آ) رابطه‌ای بین S، Q و R بیابید.

ب) اتومبیلی با سرعت ثابت از شهری به شهر دیگر در یک مسیر افقی ۱۰۰ کیلومتری حرکت می‌کند. با چشم‌پوشی از متغیر بودن سرعت در ابتدا و انتهای حرکت، معلوم کنید اتومبیل با چه سرعتی مسیر را طی کند تا سوخت مصرف شده در کل مسیر کمترین مقدار ممکن باشد. این سرعت را S_c بنامید.

پ) اگر اتومبیل با سرعت S_c حرکت کند حجم سوخت مصرف شده در کل این مسیر چند لیتر است؟

ت) اگر این اتومبیل فاصله بین این دو شهر را با بیشترین سرعت طی کند حجم سوخت مصرف شده آن در طی این مسیر نسبت به حالت قبل چند درصد افزایش می‌یابد؟

ث) نمودار مصرف سوخت اتومبیل (Q) را بر حسب سرعت (S) در نمودار خالی صفحه بعد (صفحه ۷-۳) رسم کنید. برای این منظور مقادیر حداقل پنج نقطه خاص را روی نمودار مشخص کنید و منحنی تقریبی نمودار را با رعایت مجانب‌ها، کمینه‌ها و بیشینه‌های احتمالی رسم کنید.

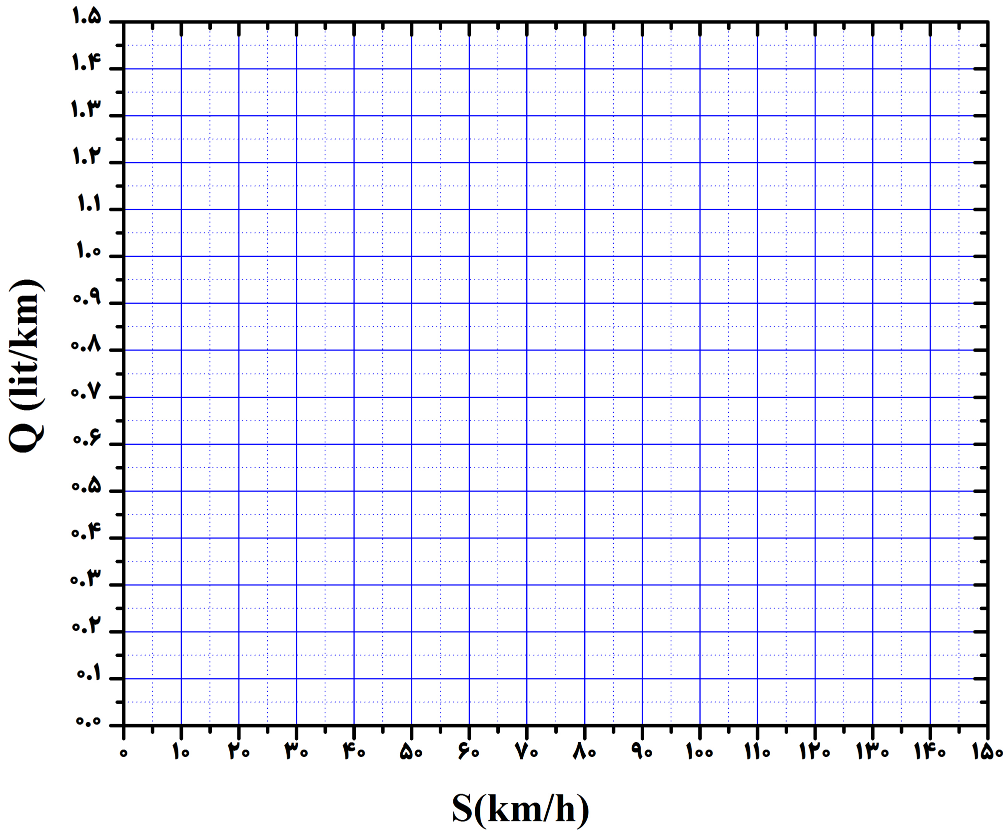
فرض کنید این اتومبیل می‌خواهد سرعت خود را با شتاب ثابت افزایش دهد. در این صورت قصد داریم میزان مصرف سوخت را در این افزایش سرعت به‌دست آوریم. اگر اتومبیل شتاب a داشته باشد کمیت R در ضریب $k = ۱ + \beta a$ ضرب می‌شود، که در آن β عددی ثابت و a شتاب است.

ج) اگر سرعت اتومبیل با شتاب ثابت a به مقدار کوچک ΔS افزایش یابد، میزان مصرف سوخت ΔV در مدت زمان این افزایش سرعت بر حسب ΔS، R، β و a چقدر است؟

چ) اگر این اتومبیل با شتاب ثابت $۱/۵\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ سرعت خود را از $۱۰۰\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ به $۱۳۰\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ برساند و مقدار β برابر با $۰/۵۰\frac{\mathrm{s}^۲}{\mathrm{m}}$ باشد، میزان مصرف سوخت را در طی این افزایش به‌دست آورید.

این شکل جزء پاسخ سؤال ۷ است.

پاسخ بخش ث): نمودار مصرف سوخت اتومبیل (Q) بر حسب سرعت (S)



1

به نام خدا

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - شیره ۵ - ۱۳۹۹

۱) آ) با توجه به اینکه در $t=0$ از مبدا عبور کرده و سرعت آن مثبت می باشد داریم:

$$x(t) = A_0 \sin\omega t \quad \text{و} \quad v(t) = A_0\omega\cos\omega t$$

ب) با توجه به توضیحات سؤال $P(t) = fv$ از طرفی با توجه به اینکه معادلات حرکت تغییری نمی کنند داریم $x(t) = A\sin\omega t$ ، $v(t) = A\omega\cos\omega t$ یعنی اثر نیروی مقاومت تنها دامنه را تغییر می دهد

توان لحظه ای $\quad P = fv = -bv^2 = -bA^2\omega^2\cos^2\omega t$

$$= -bA^2\omega^2\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)$$

توان متوسط $\quad \overline{P} = -\overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2(1+\cos 2\omega t)} = -\overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2} - \overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2\cos 2\omega t}$

جمله دوم با توجه به وجود جمله $\overline{\cos 2\omega t}$ صفر است.

$$\Rightarrow \overline{P} = -\frac{1}{2}bA^2\omega^2$$

پ) انرژی کل نوسانگر بدون نیروی مقاومت به صورت $E = \frac{1}{2}KA_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A_0^2$ می باشد، با توجه به توضیحات و اینکه تنها دامنه تغییر می کند داریم: $E(\tau) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

$$\overline{P} = -\frac{1}{2}b\omega^2A^2 = -\frac{b}{m}\left(\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right) = -\frac{b}{m}E$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} = -\frac{b}{m}E(\tau)$$

با توجه به توضیحات تابع نمایی E باید به صورت $E = Ce^{-\frac{b}{m}\tau}$ باشد که در $\tau=0$ ، $C = E_0$ به دست می آید.

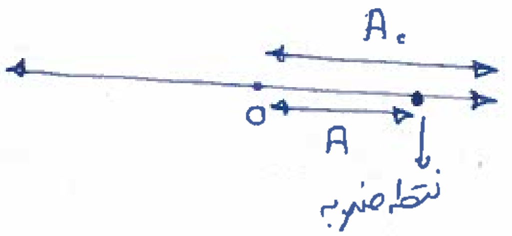
$$\Rightarrow E = E_0 e^{-\frac{b}{m}\tau}$$

ب) با جاگذاری $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$ داریم:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \left(\frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\right) e^{-b/m\,\tau}$$

$$\Rightarrow \quad A = A_0\, e^{-\frac{b}{2m}\tau}$$

ث) میدانیم $F = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$ که P تکانه جسم است:



با توجه به شکل رو به رو در نقطه ای که ضربه وارد می شود باید سرعت نوسانگر قبل از ضربه با سرعت متناظر با نوسانگر بدون مقاومت در نقطه $x = A$ برسد پس داریم:

برای نوسانگر $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow$ بعد از ضربه $v = \omega\sqrt{A_0^2 - A^2}$

$$\Rightarrow \quad v = \omega\sqrt{A_0^2 - A_0^2 e^{-b/m\,\tau}} = \omega A_0\sqrt{1 - e^{-b/m\,\tau}}$$

قبل از ضربه $v = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{m\left(\omega A_0\sqrt{1 - e^{-b/m\,\tau}} - 0\right)}{\delta t}$

ج)

$$A = \frac{1}{2}A_0 \Rightarrow A_0\, e^{-\frac{b}{2m}\tau} = \frac{1}{2}A_0 \Rightarrow e^{-\frac{b}{2m}\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{b}{2m}\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{2m}{b}\ln 2$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{2\times 10^{-1} \times 0.69}{10^{-3}} = 1.38\times 10^{2}\ s \simeq 1.4\times 10^{2}\ s$$

زمان تناوب $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\times 3.14}{10^2} = 6.28\times 10^{-2}\,s \simeq 6.3\times 10^{-2}\,s$

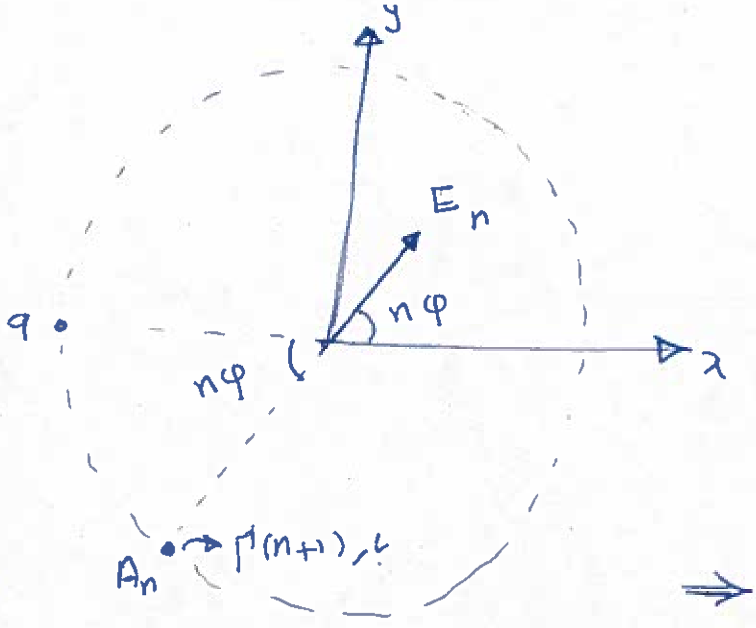
$$\Rightarrow \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1.4\times 10^{2}}{6.3\times 10^{-2}} \simeq 2.2\times 10^{3}$$

$$\bar{F} = \frac{m\omega_0 A}{\delta t}\sqrt{1 - e^{-\frac{b}{m}\tau}} = \frac{10^{-1}\times 10^{2}\times 5\times 10^{-2}}{2\times 10^{-4}}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}\times 10^{3}\,N$$

$$\simeq \frac{5\times 1.7}{4}\times 10^{3} = \frac{8.5}{4}\times 10^{3}$$

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

۲)



آ) $\vec{E}_n = |\vec{E}_n| (\cos n\varphi\, \hat{i} + \sin n\varphi\, \hat{j})$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\cos n\varphi\, \hat{i} + \sin n\varphi\, \hat{j})$$

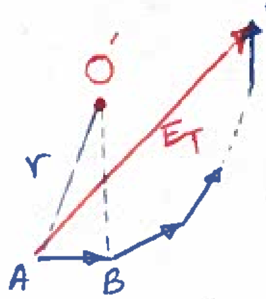
$$\vec{E}_T = \sum_{n=0}^{N} \vec{E}_n$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{n=0}^{N} (\cos(n\varphi)\hat{i} + \sin(n\varphi)\hat{j})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{Tx} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \cos(n\varphi) \\ E_{Ty} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \sin(n\varphi) \end{cases}$$

ب) می‌دانیم که اندازه میدان هر بار در مبدأ مختصات یکسان است و تنها جهت میدان‌ها با یکدیگر متفاوت است. به این صورت که میدان هر بار نسبت به میدان بار قبلی به اندازه φ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت چرخیده است.

با توجه به شکل این بردارها همگی وترهای یک دایره به شعاع r می‌باشند که O' مرکز عمودمنصف هر E_n می‌باشد.



$O'AB$ درمثلث $\Rightarrow \dfrac{|AB|}{2} = r \sin \dfrac{\hat{AO'B}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{|E_n|}{2} = r \sin\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{Kq}{2R^2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}}$$

$\hat{AO'C} = (N+1)\varphi \rightarrow AO'C$ درمثلث $\Rightarrow \dfrac{|E_T|}{2} = r\sin\left(\dfrac{\hat{AO'C}}{2}\right)$

$$\Rightarrow |E_T| = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin \varphi/2} \qquad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

زاویه E_T با محور xها $= \hat{CAB} = \hat{O'AB} - \hat{O'AC} = \left(\dfrac{\pi - \varphi}{2}\right) - \left(\dfrac{\pi - (N+1)\varphi}{2}\right) = \dfrac{N\varphi}{2}$

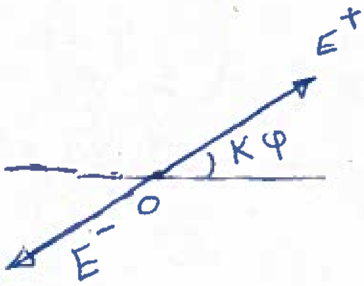
$$\Rightarrow \vec{E}_T = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin \varphi/2} \left(\cos\frac{N\varphi}{2}\hat{i} + \sin\frac{N\varphi}{2}\hat{j}\right)$$

ب) $N = 2K$ در این حالت، تعداد $K+1$ بار مثبت و K بار منفی داریم. در بارهای هم نام با هم زاویه 2φ می‌سازند. میدان هر دسته از بارها طبق قسمت الف به صورت زیر است:

$$|\vec{E}_+| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin (K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}}$$ زاویه با محور xها $= K\frac{2\varphi}{2} = K\varphi$

$$|\vec{E}_-| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin K\, 2\varphi/2}{\sin\frac{2\varphi}{2}}$$ زاویه با محور xها $= (K-1)\frac{2\varphi}{2} = (K-1)\varphi$

اما باید توجه داشت در بارهای منفی از زاویه φ شروع شده‌اند ولی در بالا برای حالتی است که از زاویه ۰ (از مبدأ) شروع شده باشند. بنابراین زاویه با محور xها برای بارهای منفی هم $(K-1)\varphi + \varphi$ می‌باشد یعنی میدان‌ها در یک راستا قرار دارند.



$$\Rightarrow |E_T| = E^+ - E^- = \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{\sin (K+1)\varphi - \sin K\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{2K+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right)$$

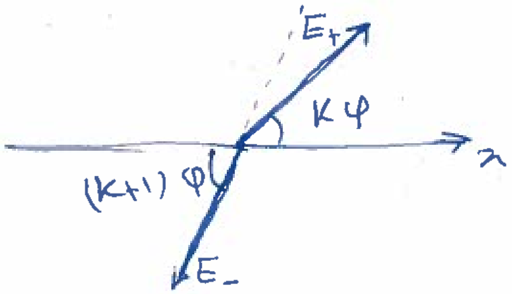
$$= \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{\cos\frac{N+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right)$$ زاویه E_T با محور xها $= K\varphi = \frac{N}{2}\varphi$

$$\Rightarrow \vec{E}_T = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\cos\frac{N+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{N}{2}\varphi\,\hat{i} + \sin\frac{N}{2}\varphi\,\hat{j}\right)$$

ج) $N = 2K+1$ در این حالت $K+1$ بار مثبت و $K+1$ بار منفی داریم. در بارهای هم نام با هم زاویه 2φ می‌سازند. با توجه به نکته گفته شده در مورد زاویه بارهای منفی در قسمت ب داریم:

$$|E_+| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin (K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}}$$ زاویه با محور xها $= \beta_+ = K\frac{2\varphi}{2} = K\varphi$

$$|E_-| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin (K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}}$$ زاویه با محور xها $= \beta_- = K\frac{2\varphi}{2} + \varphi = (K+1)\varphi$



$$\Rightarrow \quad E_{Tx} = E_+ \cos K\varphi - E_- \cos (K+1)\varphi$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{\sin \varphi} \left(\cos K\varphi - \cos (K+1)\varphi \right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \left(-2 \sin \frac{2K+1}{2}\varphi \sin \left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{2K+1}{2}\varphi = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{N}{2}\varphi$$

$$E_{Ty} = E_+ \sin K\varphi - E_- \sin (K+1)\varphi$$

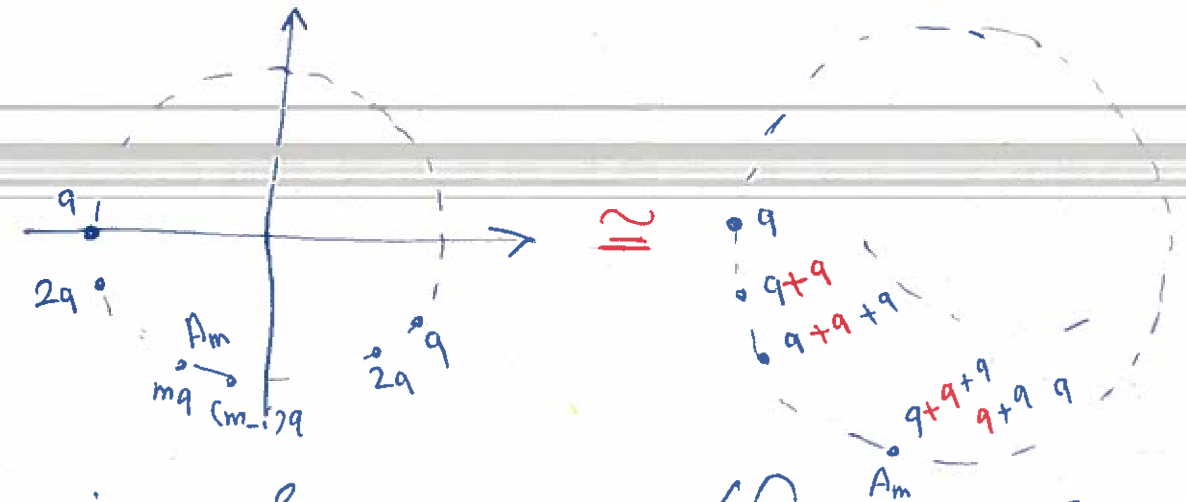
$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{\sin \varphi} \left(\sin K\varphi - \sin (K+1)\varphi \right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \left(2 \sin \left(-\frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{2K+1}{2}\varphi \right)$$

$$= -\frac{Kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{N}{2}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E_T} = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \left(\sin \frac{N}{2}\varphi \, \hat{i} - \cos \frac{N}{2}\varphi \, \hat{j} \right)$$

ب) در این حالت آرایش بارها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.



این آرایش از m حالت قسمت الف به دست می‌آید که هر حالت دارای m بار q می‌باشد و هر حالت نسبت به حالت قبلی به اندازه φ چرخیده است.

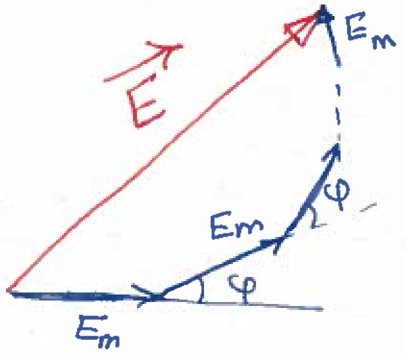
4

ادامه سؤال ۲.

میدان الکتریکی هر آرایش با m بار q برابر است با

$$\vec{E}_m = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\varphi/2}\left[\cos\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi\,\hat{i} + \sin\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi\,\hat{j}\right]$$

میدان کل برابر است با m بردار $\vec{E}_m$ که هر کدام نسبت به قبلی به اندازه φ چرخیده است.



$$|E_m| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

طبق روابط قسمت (ب) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} r = \dfrac{|E_m|}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{Kq}{2R^2}\,\dfrac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \\ |\vec{E}| = 2r\sin\dfrac{m\varphi}{2} \\ \text{زاویه با محور x ها} = (m-1)\dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\left(\cos(m-1)\frac{\varphi}{2}\,\hat{i} + \sin(m-1)\frac{\varphi}{2}\,\hat{j}\right)$$

۷

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیر ماه ۱۳۹۹

سؤال ۳:

الف) با توجه به تعریف ثابت واپاشی احتمال واپاشی یک اتم در مدت زمان Δt برابر است با $\lambda \Delta t$

از طرف دیگر هر کدام از N اتم می‌توانند با چنین احتمالی واپاشیده شوند. بنابراین داریم

$$\text{احتمال واپاشی کل} = \lambda \Delta t = -\frac{\Delta N}{N}$$

علامت منفی به این منظور لحاظ شده است که تعداد هسته‌های پرتوزا با گذشت زمان کاهش می‌یابد

$$\Rightarrow \Delta N = -\lambda N \Delta t$$

ب)

با توجه به تعریف مشتق $\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\lambda N \Delta t}{\Delta t} = -\lambda N$

پ) با توجه به تعریف تابع نمایی و مشتق آن داریم:

$$N = a\exp(bt) = a e^{bt} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = a b e^{bt} = bN$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\lambda} \qquad N(0) = N_0 = a e^{b \times 0} = a \Rightarrow a = N_0$$

$$\Rightarrow \boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

ت) نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو مدت زمانی است که نیمی از هسته‌های اولیه واپاشیده شده باشند.

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow N_0 e^{-\lambda \tau} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow e^{-\lambda \tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\lambda \tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

۸

ب) با توجه به تعریف ثابت واپاشی، هسته مادر می‌تواند با احتمال λ_1 به هسته دختر نوع ۱ و یا با احتمال λ_2 به هسته دختر نوع ۲ واپاشیده شود.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -(\lambda_1 + \lambda_2) N$$

ثابت واپاشی کل

$$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 \, e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}$$

اگر $N_1(t)$، $N_2(t)$ به ترتیب تعداد هسته‌های دختر نوع ۱ و ۲ در زمان t باشند داریم:

$$N_0 = N(t) + N_1(t) + N_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad N_1(t) + N_2(t) = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}\right)$$

با توجه به مفهوم احتمالاتی ثابت واپاشی داریم:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_2 + N_2 = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N_2 \, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}\right)$$

به همین ترتیب برای N_1 $\Rightarrow \quad N_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}\right)$

ج) احتمال واپاشی هسته‌های پرتوزا = آهنگ تولید تعداد هسته‌های پرتوزا − آهنگ تغییرات تعداد هسته‌های پرتوزا

$$\Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = R - \lambda N$$

ج)

$$N(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \beta\gamma e^{\gamma t} = \gamma(\beta e^{\gamma t})$$
$$= \gamma(N(t) - \alpha)$$
$$= -\alpha\gamma + \gamma N(t)$$

با توجه به روابط قسمت ج داریم: بنابراین $\begin{cases} -\alpha\gamma = R \\ \gamma = -\lambda \end{cases}$ $\quad \alpha = \frac{R}{\lambda}$

از طرفی $N(t=0)=0$ بنابراین $\beta = -\alpha = -\frac{R}{\lambda} \Leftarrow \alpha + \beta = 0$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{R}{\lambda} - \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

ح) با توجه به نمودار قسمت د و واپاشی خالص (از زمان 25 به بعد) در زمان تقریباً 28.75 نیمی از محصول تولید شده واپاشی کرده است بنابراین نیمه عمر این محصول حدود 3.75 ساعت می‌باشد بنابراین با توجه:

رابطه $\tau = \frac{Ln2}{\lambda}$ داریم:

$$\lambda(h^{-1}) = \frac{Ln2}{\tau} \cong \frac{Ln2}{3.75} = \frac{0.69}{3.75} \cong 0.184\, h^{-1}$$

غ) با توجه به روابط قسمت ج می‌بینیم در درازمدت مقدار $N(t)$ به سمت $\frac{R}{\lambda}$ میل می‌کند و در نمودار

این مقدار برابر است با 9×10^{12} اتم

$$\Rightarrow \frac{R}{\lambda} = 9\times10^{12} \Rightarrow R = 9\times10^{12}\lambda = 9\times0.184\times10^{12}\, h^{-1}$$
$$= 1.656\times10^{12}\, h^{-1}$$

د)

$$A = \text{اکتیویته} = \lambda N(t) = R(1 - e^{-\lambda t}) = 0.75 A_{max} = 0.75R$$

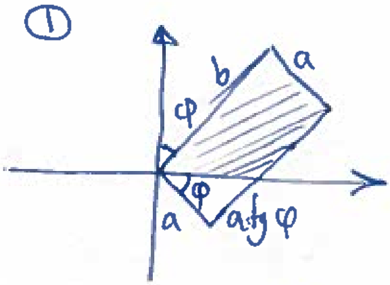
$$\Rightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \frac{3}{4} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{4} \rightarrow -\lambda t = Ln(\tfrac{1}{4})$$

$$\Rightarrow \lambda t = Ln4 = 2Ln2 \rightarrow t = \frac{2Ln2}{\lambda} = 2\tau$$

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

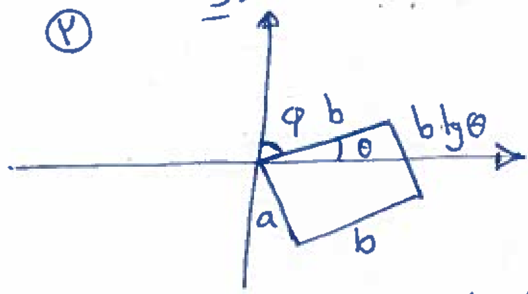
سؤال ۴) مساحت قسمت داخل میدان مغناطیسی قرار دارد بر حسب $\varphi = \omega t$ که زاویه دوران می‌باشد دارای عبارات به صورت زیر است.

(۱)



$$S = ab - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi$$
$$= \sqrt{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi$$
$$= a^2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right) \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$$

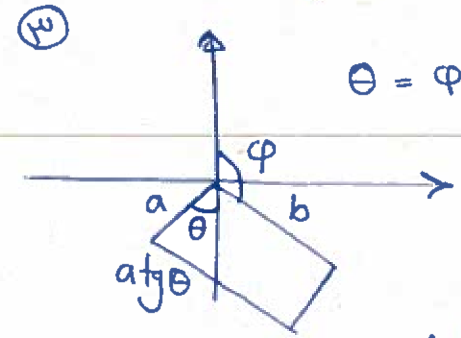
(۲)



$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$
$$= \frac{3}{2}a^2 \cot\varphi \qquad \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

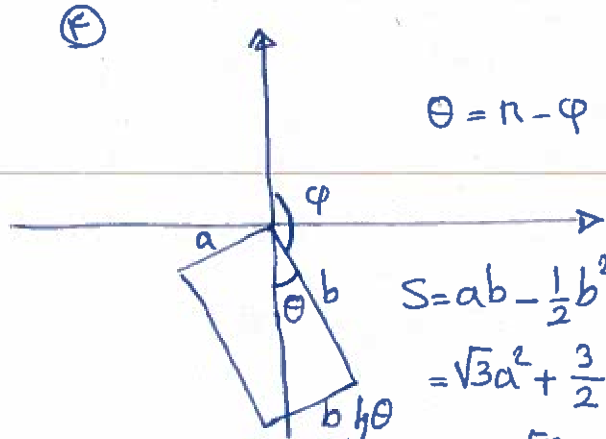
(۳)



$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}a^2 \cot\varphi \qquad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$$

(۴)



$$\theta = \pi - \varphi$$

$$S = ab - \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\theta$$
$$= \sqrt{3}a^2 + \frac{3}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi$$
$$\frac{5\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi$$

آ) با توجه به مساحت‌های قسمت بالا داریم:

$$\Phi = BS = B_0 S = \frac{B_0 a^2}{2}\begin{cases} 2\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3} - \operatorname{tg}(\omega t) & 0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{3} \\ 3\cot\varphi = 3\cot(\omega t) & \frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cot\varphi = -\cot(\omega t) & \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{5\pi}{6} \\ 2\sqrt{3} + 3\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3} + 3\operatorname{tg}(\omega t) & \frac{5\pi}{6} \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

ب)

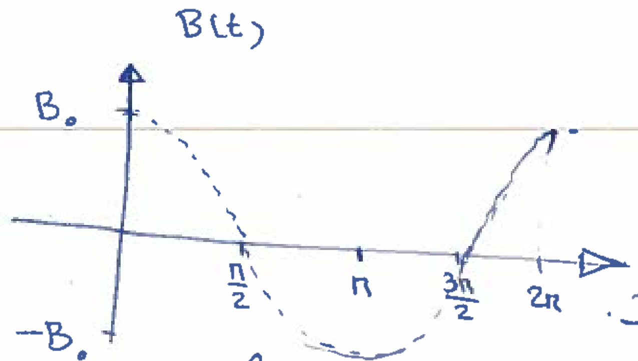
$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2}\begin{cases} -(1 + \operatorname{tg}^2 \omega t) & 0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{3} \\ -3(1 + \cot^2 \omega t) & \frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \\ (1 + \cot^2 \omega t) & \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq 5\pi/6 \\ 3(1 + \operatorname{tg}^2 \omega t) & \frac{5\pi}{6} \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

پ) در این حالت میدان مغناطیسی تغییر کرده است (تغییرات زوایا مانند قبل است)

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B_0 \cos\omega t \, S = \frac{B_0 a^2}{2}\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t \\ 3\cos\omega t \, \cot\omega t \\ -\cos\omega t \, \cot\omega t \\ 2\sqrt{3}\cos\omega t + 3\sin\omega t \end{cases}$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2}\begin{cases} -2\sqrt{3}\sin\omega t - \cos\omega t \\ -3\left(\sin\omega t \, \cot\omega t + \cos\omega t \, (1+\cot^2\omega t)\right) \\ +\left(\sin\omega t \, \cot\omega t + \cos\omega t \, (4\cot^2\omega t)\right) \\ -2\sqrt{3}\sin\omega t + 3\cos\omega t \end{cases}$$

ت)



در بازه $[0 \;\; \frac{\pi}{2}]$ میدان در جهت $\hat{k}$ (⊙) کاهش می‌یابد و مساحت نیز کاهش می‌یابد بنابراین میدان القایی بیرون‌سو ⊙ و جریان القایی پادساعتگرد است.

در بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ مساحت در حال افزایش و میدان B در جهت درون‌سو ⊗ افزایش می‌یابد در این حالت هم میدان القایی باید برون‌سو باشد ⊙ بنابراین جریان پادساعتگرد است.

در حالت $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ مساحت در حال کاهش و میدان درون‌سو ⊗ در حال کاهش است. در این حالت میدان القایی باید درون‌سو باشد ⊗ بنابراین جریان ساعتگرد است.

در بازه $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ مساحت در حال افزایش و میدان نیز برون‌سو هم در حال افزایش است بنابراین میدان القایی باید ⊗ باشد بنابراین جریان ساعتگرد است.

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ ام - آذرماه ۱۳۹۹

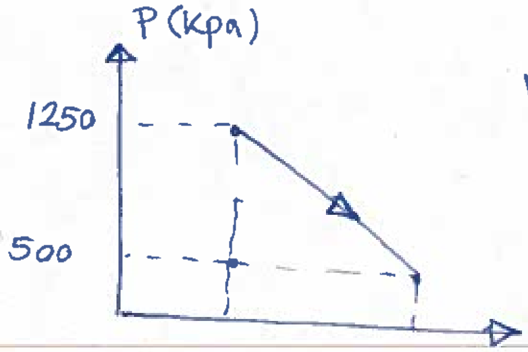
ه)

آ) $W_{\text{ترمودینامیکی}} = 75\%\, K \Rightarrow (P-P_0)\Delta V = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}mv^2$

$$v = 150\times 1.8\times\frac{10}{36}\ m/s = 75\ m/s \Rightarrow \Delta V = \frac{3mv^2}{8(P-P_0)} = \frac{3\times 18\times 10^3\,(75)^2}{8\times \cancel{17}1150\times 10^3}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{3\times 18\times 75^2}{8\times 1150} = 33.01 \simeq 33\ (m^3)$$

ب)



$$W_{thermo} = \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\Delta V = P_0\Delta V + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{P_1+P_2}{2} - P_0\right)\Delta V = \frac{3\times 18\times 10^3\times (75)^2}{8}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1750}{2} - 700\right)^{kpa}\Delta V = \frac{54\times 10^3\times 75^2}{8}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{54\times 10^3\times 75^2}{4\,(1550)\times 10^3} = 48.99 \simeq 49\ m^3$$

پ) $P = aV + b \Rightarrow a = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{(1250-500)\times 10^3}{-49} \simeq -15.3\times 10^3$

$$b = P - aV = 1250\times 10^3 + 15.3\times 10^3\times 50 = (1250+765)\times 10^3 = 2015\times 10^3$$

$$\Rightarrow P(kpa) = -15.3\,V_{(m^3)} + 2015$$

ت) $V_2 = V_1 + \Delta V = 50 + 49 = 99\ m^3$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{500\times 99}{1250\times 50} = \frac{99}{125} \Rightarrow T_2 = \frac{99}{\cancel{125}}\times \overset{4}{\cancel{500}} = 396\ K$$

۱۳

ت)

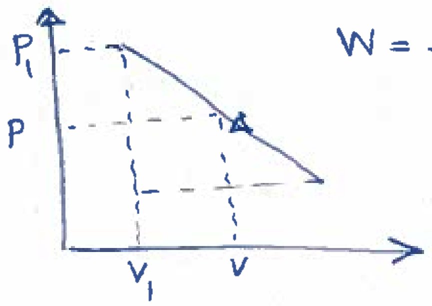
$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{1}{nR}PV = \frac{1}{nR}(aV+b)V = \frac{1}{nR}(aV^2+bV)$$

$$\frac{dT}{dV} = 0 \Rightarrow 2aV + b = 0 \Rightarrow V = -\frac{b}{2a} = +\frac{2015}{2\times 15.3} = 65.8 \cong 66$$

$$\Rightarrow P = aV + b = -15.3 \times 65.8 + 2015 = +1008.26 \cong 1008\ \text{kpa}$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{PV}{P_1V_1}T_1 = \frac{1008 \times 66}{1250 \times 50} \times 500 = 532.2 \cong 532\ \text{K}$$

ث)



$$W = -S \Rightarrow \Delta U = Q + W = Q - S$$

$$\Rightarrow nC_v\Delta T = Q - S$$

$$\Rightarrow Q = nC_v\Delta T + S$$

$$\Rightarrow Q = \frac{7}{2}nR(T - T_1) + \frac{1}{2}(P + P_1)(V - V_1)$$

$$= \frac{7}{2}(PV - P_1V_1) + \frac{1}{2}(PV - PV_1 + P_1V - P_1V_1)$$

$$Q\,(\text{kj}) = 4PV - 4P_1V_1 - \frac{V_1}{2}P + \frac{P_1}{2}V$$

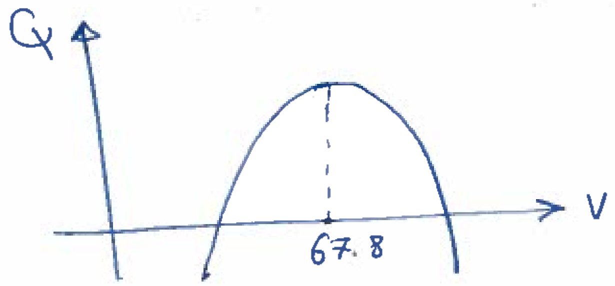
$$= 4(aV+b)V - 4\times 1250 \times 50 - \frac{50}{2}(aV+b) + 625V$$

$$= 4(aV^2 + bV) - 250\times 10^3 - 25(aV+b) + 625V$$

$$= 4aV^2 + (4b - 25a + 625)V - (250\times 10^3 + 25b)$$

$$Q\,(\text{kj}) = -61.2V^2 + 8302.5V + 300375$$

$$\frac{dQ}{dV} = 0 \Rightarrow -122.4V + 8302.5 \Rightarrow V = 67.8$$



پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

(۴)

آ) برای حل سؤال بهتر است ابتدا در سطح تمام ارتفاع نقاط نوشته شود و سپس نقاط مشخص گردد.

نقشه $\Delta d_{min} = 1mm$

$$\text{شیب} = \frac{\text{اختلاف ارتفاع}}{\text{مسیر}} \Rightarrow \text{شیب بیشینه} = \frac{\Delta h_{max}}{\Delta d_{min}}$$

$$\Rightarrow m_{max} = \frac{100m}{0.1 \times 2000} = \frac{100}{200} = 1/2 = 0.5 = 5\times10^{-1}$$

$$h_c = 1000m$$

ب) روی نقشه مشخص شده است.

ت) برای F_{max} باید نسبت توان به سرعت بیشینه شود.

$$P = F.v \Rightarrow F_{max} = \left(\frac{P_{\text{مفید}}}{v}\right)_{max}$$

$$F_{max} = \frac{1}{10}\left(\frac{P}{v}\right)_{max}$$

با توجه به نمودار داریم: $P \cong 285\ hp$ و $v \cong 29\ Km/h$

$$\Rightarrow F_{max} = \frac{1}{10}\ \frac{285\times735}{29\times\frac{10}{36}} = 2600.4\ N \cong 2.6\times10^{3} N$$

ث) روی سطح شیبدار نیروی $mg\sin\theta$ به سمت پایین به اتومبیل وارد می‌شود. اگر اتومبیل با سرعت ثابت حرکت کند بیشترین شیب زمانی است که $mg\sin\theta = F_{max}$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{F_{max}}{mg} = \frac{2600.4}{2\times10^{3}\times10} = 0.13 = 1.3\times10^{-1} \quad \sin\theta \ll 1$$

$$\Rightarrow tg\theta \cong \sin\theta \cong 0.13 = 1.3\times10^{-1}$$

ج) شیبی که اتومبیل می‌تواند بالا رود $= 0.77\times0.13 \cong 0.1 = 1\times10^{-1}$

یعنی $tg\theta \cong 0.1$ است بنابراین $\frac{\Delta h}{\Delta d} \cong 0.1$

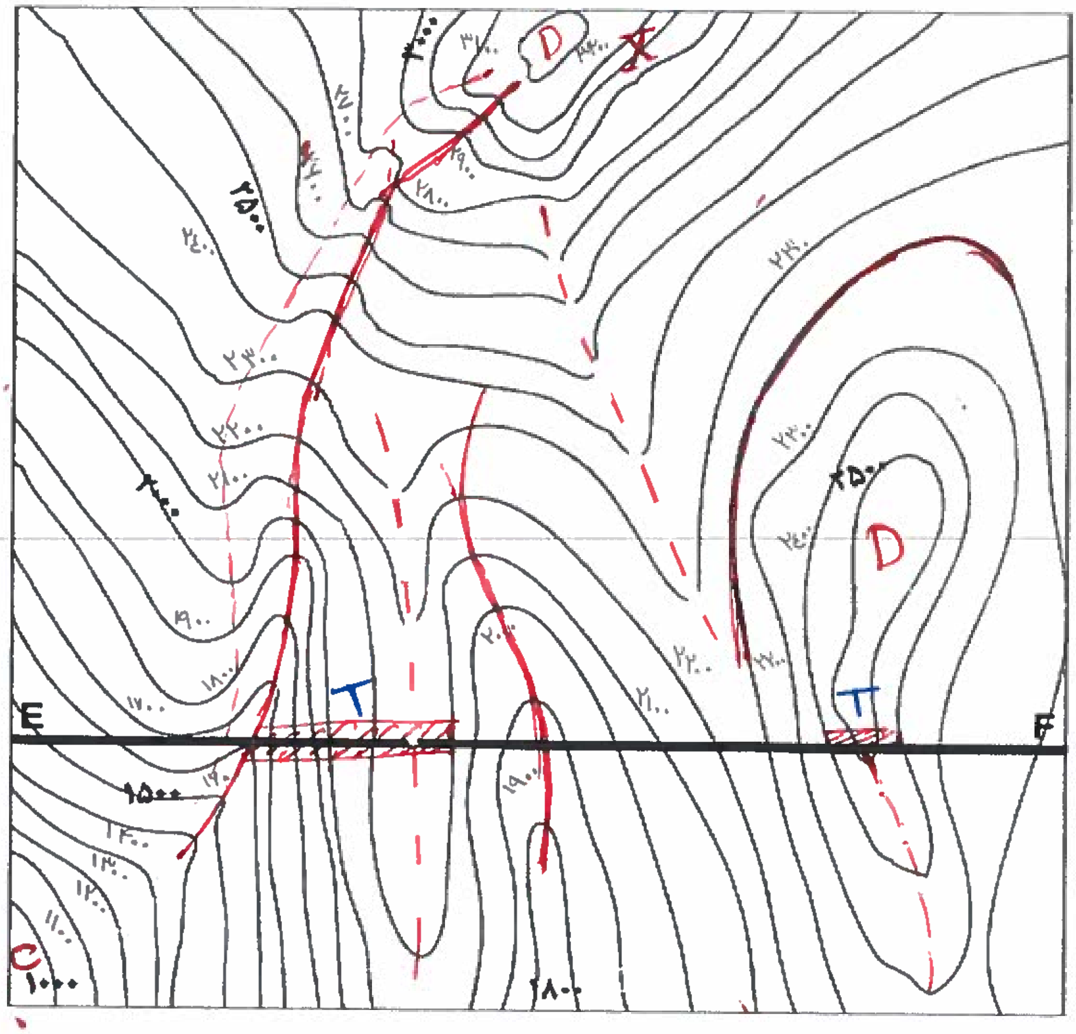
$$\Rightarrow \frac{100}{\Delta d} \cong 0.1 \Rightarrow \Delta d \cong 1000m = 1\ Km$$

بنابراین اگر در طی مسیر به ازای $100m$ تغییر ارتفاع مسافت پیش کمتر از $0.5\ Km$ روی نقشه باشد باید تونل و پل زده شود.

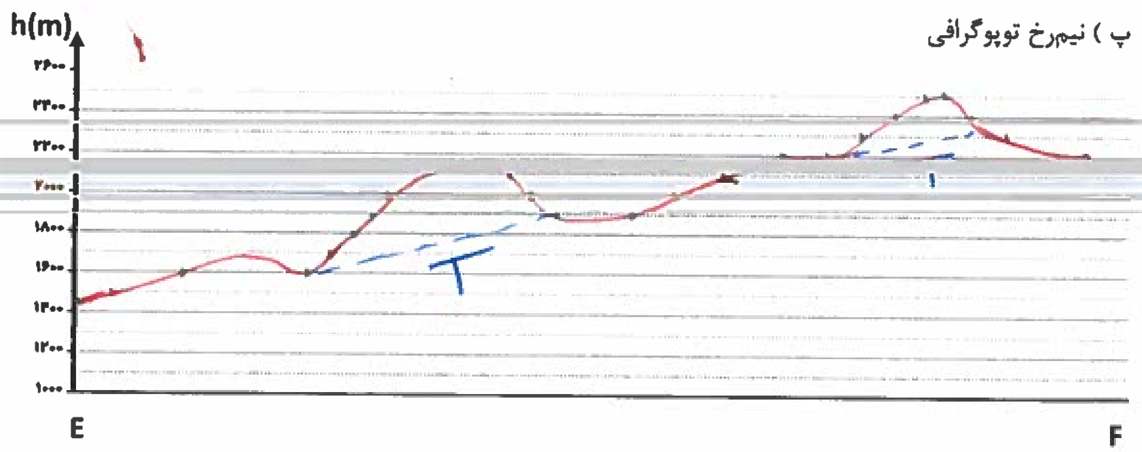
۱۵

این برگ قسمتی از پاسخ نامه است. دقت کنید که تصویر پاسخ نامه دچار خط‌خوردگی نشود.

هریک سانتی متر روی نقشه معادل ۲ کیلومتر واقعی است. ارتفاع‌های ذکرشده در نقشه برحسب متر است.



پ) نیم‌رخ توپوگرافی



سؤال ۷)

آ) $R = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = Q\cdot S$

ب) با توجه به اینکه سرعت ثابت است بنابراین در طی مسیر R هم مقدار ثابتی دارد و بنابراین Q هم ثابت است.

$$R = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \quad dV = R\,dt = \frac{R}{S}\,dl$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{R}{S}\Delta l$$

با توجه به اینکه $\Delta l = 100^{km}$ می‌باشد بنابراین ΔV هنگامی کمترین مقدار است که نسبت R/S کمترین مقدار را باشد یعنی شیب خط واصل از مبدأ به نقطه مورد نظر کمترین مقدار باشد (که نمودار بالای این خط مماس باشد).

$$\Rightarrow S_c \cong 50\ km/h \Rightarrow R \cong 180\times10^{-5}\ lit/s$$

پ)

$$\Delta V = \frac{R}{S_c}\Delta l = \frac{180\times10^{-5}\ lit/s}{50\ km/h\times 10/36}\cdot 100\times10^{3}\ m$$

$$= \frac{180\times10^{-5}\times36\times10^{3}}{5} = \frac{18\times36}{5}\times10^{-1}\ lit = 12.96\ lit \cong 13\ lit$$
$$= 1.3\times10$$

ت) $S_{max} = 130\ \frac{km}{h} \qquad R = 700\times10^{-5}\ lit/s$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{R}{S}\Delta l = \frac{700\times10^{-5}}{130\times10/36}\times10^{5} = \frac{7\times36}{13}\ lit \cong 19.4 \cong 19\ lit$$
$$= 1.9\times10$$

درصد افزایش سوخت $= \frac{19-13}{13}\times100 \cong 46\%$

17

ث)

$$Q = \frac{R}{S}$$

$R\,(lit/s)$	375	125	180	550	700
$S\,(km/h)$	10	25	50	110	130
$Q\,(lit/km)$	1.35	0.18	0.13	0.18	0.19

ج)

$$\Delta V = (1+\beta a) R \Delta t = (1+\beta a) R \frac{\Delta s}{a}$$

چ) در محدوده مورد نظر تغییرات R برحسب S خطی است

$$\Delta V = \frac{(1+\beta a)}{a} \underbrace{\int R\, ds}_{\text{مساحت زیر نمودار}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{(1+\beta a)}{a} \left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)(S_2 - S_1)$$

$$= \left(\frac{1+0.5\times 1.5}{1.5}\right)\left(\frac{470+700}{2}\right)\times 10^{-5}\left(30\ \frac{km}{h}\right)$$

$$\cong 0.057\ lit = 5.7\times 10^{-2}$$

۱۸

این شکل جزء پاسخ سؤال ۷ است.

پاسخ بخش ث): نمودار مصرف سوخت اتومبیل (Q) بر حسب سرعت (S)